А. В. Неклюдов, О задаче Робена для эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях, *Матем. заметки*, 2018, том 103, выпуск 3, 417–436

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11086

Математические заметки

Том 103 выпуск 3 март 2018

УДК 517.956.223

О задаче Робена для эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях

А. В. Неклюдов

В полубесконечном цилиндре рассматривается поведение обобщенных решений дивергентных эллиптических уравнений второго порядка, удовлетворяющих на боковой поверхности цилиндра третьему краевому условию.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, задача Робена, дихотомия решений, трихотомия решений, стабилизация.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11086

Поведение решений эллиптических уравнений в цилиндрических или близких к ним областях при задании на боковой поверхности цилиндра условий Дирихле, Неймана или периодичности по всем переменным, кроме одной, изучено довольно хорошо [1]–[4]. Вопрос о поведении решения, удовлетворяющего на боковой части границы области краевому условию третьего типа (условие Робена) рассматривался лишь для уравнения Лапласа [5]–[7]. В [5], [6] изучалась скорость убывания решений третьей краевой задачи для уравнения Лапласа при условии принадлежности самого решения и его первых производных пространству L_2 в неограниченной области цилиндрообразного вида. В [7] с помощью метода барьерных функций было рассмотрено поведение решений уравнения Лапласа в полубесконечном цилиндре, получены условия близости задачи Робена к задачам Дирихле или Неймана.

В настоящей работе поведение обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрической области, удовлетворяющих на боковой поверхности условию Робена, изучается с помощью энергетических оценок типа принципа Сен-Венана [2]–[4]. Основное внимание уделено зависимости свойств решений от поведения неотрицательного коэффициента $\beta(x)$ в граничном условии.

1. Основные обозначения и определения. В n-мерном цилиндре

$$\Omega = (0,+\infty)\times\widehat{\Omega}$$

рассматривается уравнение эллиптического типа

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\biggl(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\biggr)=0, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \widehat{x}) \in \mathbb{R}^n_x$, $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n-1}_{\widehat{x}}$ – ограниченная область с липшицевой границей, $a_{ij}(x)$ – измеримые функции в Ω,

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \lambda_1|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_2|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const} > 0.$$

На боковой поверхности цилиндра $\Gamma = (0, \infty) \times \partial\widehat{\Omega}$ задано краевое условие третьего типа (условие Робена)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u\right)\bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{1.2}$$

где $\partial u/\partial\nu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial u/\partial x_i \cos(\vec{n}, x_j)$, $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к Γ; $\beta(x) \geqslant 0$ – измеримая локально ограниченная функция на Γ.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega(a,b) = \Omega \cap \{x : a < x_1 < b\}, \qquad \Omega_t = \Omega(t, t+1),$$
$$\Gamma(a,b) = \Gamma \cap \{x : a < x_1 < b\}, \qquad \Gamma_t = \Gamma(t, t+1),$$
$$S_t = \{x : x_1 = t,\, \widehat{x} \in \widehat{\Omega}\}, \qquad \gamma_t = \Gamma \cap \{x : x_1 = t\},$$
$$\nabla u = \mathrm{grad}\, u, \qquad m_0 = \mathrm{mes}_{n-1}\widehat{\Omega}, \qquad \widehat{u}(t) = m_0^{-1}\int_{S_t} u\, d\widehat{x}, \qquad \overline{u}(t) = m_0^{-1}\int_{\Omega_t} u\, dx.$$

Через $\Phi_{a,h_1;b,h_2} = \Phi_{a,h_1;b,h_2}(x_1)$ будем обозначать непрерывную функцию, такую, что $\Phi_{a,h_1;b,h_2} = 1$ при $a + h_1 \leqslant x_1 \leqslant b$, $\Phi(a) = \Phi(b + h_2) = 0$, Φ – линейная при $a \leqslant x_1 \leqslant a + h_1$ и при $b \leqslant x_1 \leqslant b + h_2$.

Под решениями (1.1), (1.2) в Ω будем понимать обобщенные решения, т.е. функции, принадлежащие пространству С. Л. Соболева $W_2^1(\Omega(0,t))$ для всех $t > 0$ и удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_{\Omega(0,t)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int_{\Gamma(0,t)} \beta uv\, dS = 0 \tag{1.3}$$

для всех функций $v \in W_2^1(\Omega(0,t))$, таких, что $v|_{S_0 \cup S_t} = 0$.

2. Вспомогательные оценки.

Лемма 1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей γ; $\psi \in L_\infty(\gamma)$, $\int_\gamma \psi\, dS = 0$, w – решение задачи Неймана: $Lw = 0$ в D, $(\partial w/\partial\nu)|_\gamma = \psi$; $\int_D w\, dx = 0$. Тогда*

$$\sup_D |w| \leqslant c_0 \sup_\gamma |\psi|,$$

$c_0 = \mathrm{const}$ *не зависит от w и ψ.*

Доказательство. Пусть $\sup_\gamma |\psi| = 1$. Достаточно доказать, что в этом случае $\sup_D |w| \leqslant c_0$. Используя стандартную оценку интеграла Дирихле решения задачи Неймана и неравенство Пуанкаре, получим

$$\int_D w^2\, dx \leqslant c_1 \int_D |\nabla w|^2\, dx \leqslant c_2,$$

постоянные $c_i > 0$ зависят только от λ_1, λ_2 и области D. Полагая в интегральном тождестве для решений задачи Неймана пробную функцию

$$v = (w-k)^+ = \max\{w-k, 0\}, \qquad k = \mathrm{const} > 0,$$

получим

$$\begin{aligned}
\int_{A_k} |\nabla w|^2\,dx &\leqslant \lambda_1^{-1}\int_{A_k}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\,dx = \lambda_1^{-1}\int_\gamma \psi(w-k)^+\,dS\\
&\leqslant \lambda_1^{-1}\int_\gamma (w-k)^+\,dS \leqslant c_3\int_{A_k}((w-k)+|\nabla w|)\,dx\\
&\leqslant c_3 2^{1/2}\operatorname{mes}^{1/2} A_k\biggl(\int_{A_k}((w-k)^2+|\nabla w|^2)\,dx\biggr)^{1/2}\\
&\leqslant \frac12\int_{A_k}((w-k)^2+|\nabla w|^2)\,dx + c_4\operatorname{mes}A_k,
\end{aligned}$$

где $A_k = \{x : w(x) > k\}$. Отсюда

$$\int_{A_k}|\nabla w|^2\,dx \leqslant \int_{A_k}(w-k)^2\,dx + 2c_4\operatorname{mes}A_k.$$

Тогда из неравенства Гёльдера и неравенства С. Л. Соболева получим

$$\begin{aligned}
\int_{A_k}(w-k)^2\,dx &\leqslant \operatorname{mes}^{1-2/p}A_k\biggl(\int_{A_k}(w-k)^p\,dx\biggr)^{2/p}\\
&\leqslant c_5\operatorname{mes}^{1-2/p}A_k\int_{A_k}((w-k)^2+|\nabla w|^2)\,dx\\
&\leqslant c_6\operatorname{mes}^{1-2/p}A_k\biggl(\int_{A_k}(w-k)^2\,dx+\operatorname{mes}A_k\biggr),
\end{aligned}$$

где $p = 2n/(n-2)$ при $n > 2$, p – любое число, больше 2 при $n = 2$. Предположим, что $c_6\operatorname{mes}^{1-2/p}A_k \leqslant 1/2$. Тогда из предыдущего неравенства получим, что

$$\int_{A_k}(w-k)^2\,dx \leqslant 2c_6\operatorname{mes}^{2-2/p}A_k. \tag{2.1}$$

Оценивая $\operatorname{mes}A_k$ с учетом оценки L_2-нормы w, получим

$$\operatorname{mes}A_k \leqslant k^{-1}\int_{A_k} w\,dx \leqslant c_7k^{-1}\biggl(\int_D w^2\,dx\biggr)^{1/2} \leqslant c_8k^{-1}.$$

Отсюда для некоторой постоянной $k_0 > 0$, не зависящей от w, получим, что при $k \geqslant k_0$ справедливо неравенство $c_6\operatorname{mes}^{1-2/p}A_k \leqslant 1/2$. Итак, если $k \geqslant k_0$, то справедлива оценка (2.1), откуда получаем

$$\int_{A_k}(w-k)\,dx \leqslant \operatorname{mes}^{1/2}A_k\biggl(\int_{A_k}(w-k)^2\,dx\biggr)^{1/2} \leqslant c_9\operatorname{mes}^{\delta}A_k,$$

$\delta = 3/2 - 1/p > 1$. Из этой оценки следует [8; с. 94–95], что

$$\sup_D w \leqslant k_0 + c_{10}\biggl(\int_{A_{k_0}} (w-k_0)\,dx\biggr)^{(\delta-1)/\delta} \leqslant k_0 + c_{11}\biggl(\int_D w^2\,dx\biggr)^{(\delta-1)/(2\delta)} \leqslant c_{12}.$$

Аналогично получаем оценку для $\sup_D(-w)$. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1.1) в Ω_t, удовлетворяющее условию $(\partial u/\partial\nu)|_{\Gamma_t} = \psi$, $\psi \in L_\infty(\Gamma_t)$. Тогда справедлива оценка*

$$\sup_{S_{t+1/2}} u^2 \leqslant c_0\biggl(\int_{\Omega_t} u^2\,dx + \sup_{\Gamma_t}\psi^2\biggr),$$

$c_0 = \mathrm{const}$ *не зависит от $u(x)$, ψ, t.*

Доказательство. Продолжим функцию ψ на всю границу области Ω_t так, чтобы выполнялись условия

$$\int_{\partial\Omega_t}\psi\,dS = 0, \qquad \sup_{\partial\Omega_t}|\psi| \leqslant c_1\sup_{\Gamma_t}|\psi|,$$

$c_1 = \mathrm{const} > 0$ зависит только от области $\widehat{\Omega}$. Пусть w – решение задачи Неймана

$$Lw = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t, \qquad \frac{\partial w}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega_t} = \psi, \quad \int_{\Omega_t} w\,dx = 0.$$

По лемме 1

$$\sup_{\Omega_t}|w| \leqslant c_2\sup_{\partial\Omega_t}|\psi| \leqslant c_1c_2\sup_{\Gamma_t}|\psi|, \qquad c_2 = c_2(\widehat{\Omega},\lambda_1,\lambda_2).$$

Функция $W = u - w$ удовлетворяет уравнению (1.1) в Ω_t и условию $(\partial W/\partial\nu)|_{\Gamma_t} = 0$, поэтому [2; с. 600] справедлива оценка

$$\sup_{S_{t+1/2}} W^2 \leqslant c_3\int_{\Omega_t} W^2\,dx \leqslant 2c_3\int_{\Omega_t}(u^2+w^2)\,dx, \qquad c_3 = c_3(\widehat{\Omega},\lambda_1,\lambda_2).$$

Отсюда и из оценки для $|w|$ следует требуемая оценка для $u = w + W$.

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ решение уравнения (1.1) в Ω_t, удовлетворяющее условию (1.2) на Γ_t. Тогда справедливы оценки*

$$\sup_{S_{t+1/2}}|u| \leqslant c_0\biggl(\int_{\Omega_t} u^2\,dx\biggr)^{1/2}, \qquad \sup_{S_{t+1/2}}(u-C) \leqslant c_1\biggl(\int_{\Omega_t}(u-C)^2\,dx\biggr)^{1/2},$$

c_0 *не зависит от u, t; c_1 не зависит от u, t, $C > 0$.*

Доказательство. Так как для произвольных $C \geqslant 0$, $k > 0$ и любой неотрицательной ограниченной функции φ справедливо неравенство

$$\int_{\Gamma_t}\beta u(u-C-k)^+\varphi\,dS \geqslant 0,$$

из интегрального тождества (1.3) стандартным образом получаем оценку

$$\int_{A_{k,\rho(1-\sigma)}} |\nabla w|^2\,dx \leqslant c_2(\rho\sigma)^{-2}\int_{A_{k,\rho}} (w-k)^2\,dx,$$

где $w = u - C$,

$$A_{k,\varkappa} = \{x : w(x) > k\} \cap \{x : |x - x^0| < \varkappa\}, \qquad x^0 \in \Omega_t,$$

$\rho, \sigma \in (0,1)$, c_2 не зависит от w, k, ρ, σ, x^0. Отсюда следует [8; с. 100–105], что

$$\sup_{S_{t+1/2}} w \leqslant c_1\biggl(\int_{\Omega_t} w^2\,dx\biggr)^{1/2}.$$

Таким образом, вторая из требуемых оценок доказана. Кроме того, при $C = 0$ аналогично полученной оценке для $\sup u$ получаем оценку для $\sup(-u)$.

3. Поведение ограниченных решений.

Лемма 4. *Пусть $u(x)$ – ограниченное в Ω решение (1.1), (1.2). Тогда*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Gamma \beta u^2\,dS < \infty. \tag{3.1}$$

Доказательство. Полагая в (1.3) $v = u\Phi$, где $\Phi = \Phi(x_1) \in C^2(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \Phi \leqslant 1$,

$$\Phi = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x_1 \leqslant N, \\ 0, & x_1 \leqslant 0,\ x_1 \geqslant N+1, \end{cases}$$

$(\Phi')^2 \leqslant c\Phi$, $c = \mathrm{const}$, стандартным образом получаем оценку

$$\int_{\Omega(1,N)} |\nabla u|^2\,dx + \int_{\Gamma(1,N)} \beta u^2\,dS \leqslant c_1 + c_2\int_{\Omega_N} u^2\,dx, \tag{3.2}$$

$c_1, c_2 > 0$ не зависят от $N \in \mathbb{N}$, что и доказывает лемму.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ – ограниченное в Ω решение (1.1), (1.2), $\beta \geqslant 0$ на Γ. Тогда для некоторого $C = \mathrm{const}$*

$$\int_{\Omega_t} (u-C)^2\,dx \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Если также выполнено условие $\beta(x) \to 0$, $x_1 \to \infty$, равномерно по $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$, либо если $C = 0$, то

$$\sup_{\Omega_t} |u - C| \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Доказательство. С учетом леммы 4 и теоремы Реллиха получаем, что

$$\|u - C\|_{L_2(\Omega_{t_k})} \to 0, \qquad k \to \infty,$$

для некоторой последовательности $t_k \to \infty$ и постоянной C. Покажем, что

$$\|u - C\|_{L_2(\Omega_t)} \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Предположим противное. Тогда

$$\|u-C'\|_{L_2(\Omega_{t'_k})}\to 0 \qquad \text{при} \quad k\to\infty$$

для некоторой последовательности $t'_k\to\infty$ и постоянной $C'\neq C$. Учитывая непрерывность функции $\overline{u}(t)$, без ограничения общности можем считать, что C и C' одного знака; например, $0\leqslant C<C'$. Согласно лемме 3 имеем

$$\sup_{S_{t_k+1/2}}(u-C)\leqslant\alpha_k\equiv c\|u-C\|_{L_2(\Omega_{t_k})}\to 0, \qquad k\to\infty, \quad c=\mathrm{const}.$$

Пусть [9] $V(x)$ – положительное в Ω решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)\bigg|_{\Gamma}=0, \qquad C_1x_1\leqslant V(x)\leqslant C_2x_1, \quad C_1,C_2=\mathrm{const}>0.$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Очевидно, что для функции $w=u-C-\varepsilon V$ имеем $w\leqslant\alpha_k$ на $S_{t_k+1/2}$ и на $S_{T(\varepsilon)}$ для достаточно больших $T(\varepsilon)$. Так как $(\partial w/\partial\nu)|_\Gamma=-\beta u$, то w не может иметь положительного максимума на Γ, и $w\leqslant\alpha_k$ в $\Omega(t_k+1/2,T(\varepsilon))$. Устремляя ε к 0, получаем,

$$u\leqslant C+\alpha_k \qquad \text{в} \quad \Omega\biggl(t_k+\frac{1}{2},\infty\biggr),$$

что противоречит условию $C<C'$.

Утверждение теоремы относительно равномерности стремления u к постоянной следует при $C\neq0$ из леммы 2 с учетом того, что $(\partial(u-C)/\partial\nu)|_\Gamma=-\beta u$, и из леммы 3 при $C=0$. Теорема доказана.

4. Случай, близкий к задаче Дирихле: стремление ограниченных решений к 0, дихотомия решений. Для решения $u(x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющего (1.2), стандартным образом введем понятие “потока тепла” через сечение S_t цилиндра Ω:

$$P(t,u)=\lim_{h\to0+}\biggl(h^{-1}\int_{\Omega(t,t+h)}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx\biggr)=\int_{S_t}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,d\widehat{x};$$

последнее равенство справедливо для почти всех $t\geqslant0$. Пусть $0\leqslant t<T$, $h_1>0$, $h_2>0$. Положим в (1.3) $v=\Phi_{t,h_1;T,h_2}$:

$$\begin{aligned} h_1^{-1}\int_{\Omega(t,t+h_1)}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx-h_2^{-1}\int_{\Omega(T,T+h_2)}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx+\\ +\int_{\Gamma(t,T+h_2)}\beta u\Phi_{t,h_1;T,h_2}\,dS=0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Устремляя к нулю h_1, а затем h_2, получаем соотношение

$$P(T,u)-P(t,u)=\int_{\Gamma(t,T)}\beta u\,dS. \tag{4.2}$$

Легко видеть, что при $t>0$ в определении потока область интегрирования $\Omega(t,t+h)$ можно заменить на $\Omega(t-h,t)$.

Теорема 2. *Пусть* $u(x)$ *– ограниченное решение* (1.1), (1.2), $\int_\Gamma x_1\beta(x)\,dS=\infty$, $\beta(x)\to 0$ *равномерно по* $\widehat{x}\in\partial\widehat{\Omega}$, $x_1\to\infty$. *Тогда*

$$\sup_{S_t}|u(x)|\to 0, \qquad t\to\infty.$$

Доказательство. Предположим, что $u\to C\neq 0$ при $x_1\to\infty$. Можно считать, что $C>0$. Как и в доказательстве леммы 4 рассмотрим функцию $V(x)$ – положительное решение уравнения (1.1) в Ω, удовлетворяющее однородному условию Неймана на Γ и имеющее линейный рост при $x_1\to\infty$. $V(x)$ также удовлетворяет [10; с. 415] условиям

$$\int_{\Omega_t}|\nabla V|^2\,dx\leqslant c_2=\mathrm{const}, \qquad P(t,V)=1, \quad t\geqslant 0,$$

второе условие выполняется после умножения V на постоянную. Для V справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega(0,t)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx=0, \qquad t>0 \tag{4.3}$$

для всех функций $v\in W_2^1(\Omega(0,t))$, $v|_{S_0\cup S_t}=0$. Полагая $v=u\Phi_{0,1;N,1}$, получаем, что

$$\int_{\Omega(0,N+1)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\Phi_{0,1;N,1}\,dx=\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial V}{\partial x_i}u\,dx-\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial V}{\partial x_i}u\,dx.$$

Положим в интегральном тождестве (1.3) для u пробную функцию $v=V\Phi_{0,1;N,1}$:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(0,N+1)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j}\Phi_{0,1;N,1}\,dx\\&\qquad=-\int_{\Gamma(0,N+1)}\beta uV\Phi_{0,1;N,1}\,dS+\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}V\,dx-\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}V\,dx.\end{aligned}$$

Из двух последних равенств, учитывая симметричность матрицы a_{ij}, получаем, что

$$\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial V}{\partial x_i}u\,dx=\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}V\,dx-\int_{\Gamma(0,N+1)}\beta uV\Phi_{0,1;N,1}\,dS+I_0,$$

$I_0=\mathrm{const}$ – не зависит от N. Отсюда

$$\begin{aligned}\overline{u}(N)=\overline{V}(N)\int_N^{N+1}P(t,u)\,dt-\int_{\Gamma(0,N+1)}\beta uV\Phi_{0,1;N,1}\,dS&\\+\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\biggl((V-\overline{V}(N))\frac{\partial u}{\partial x_i}-(u-\overline{u}(N))\frac{\partial V}{\partial x_i}\biggr)\,dx+I_0.&\end{aligned} \tag{4.4}$$

Используя неравенства Коши–Буняковского и Пуанкаре, оценку интеграла Дирихле для V и конечность интеграла Дирихле для $u(x)$, получаем, что интеграл по Ω_N в правой части (4.4) стремится к нулю при $N\to\infty$. Тогда из (4.4) следует, что

$$\overline{V}(N)\int_N^{N+1}P(t,u)\,dt=\int_{\Gamma(0,N+1)}\beta uV\Phi_{0,1;N,1}\,dS+I_N, \tag{4.5}$$

где $|I_N|\leqslant c_3=\mathrm{const}$.

Так как по предположению $u \to C > 0$, $x_1 \to \infty$, и, согласно теореме 1, эта сходимость является равномерной относительно $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$, то $u(x) > 0$ на $\Gamma(t_0, \infty)$ для достаточно большого t_0. Тогда из (4.2) следует, что $P(t, u)$ является неубывающей функцией от t при $t > t_0$. Тогда, поскольку $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx < \infty$, то $P(t, u) \to 0$, $t \to \infty$, следовательно $P(t, u) \leqslant 0$ для достаточно больших t. Из условий теоремы следует, что $\int_\Gamma \beta u V\,dS = +\infty$, тогда равенство (4.5) невозможно, если $N \geqslant N_0 = \mathrm{const}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Лемма 5. *Пусть $u(x)$ – решение* (1.1), (1.2) *в* Ω, $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx < \infty$. *Тогда для почти всех* $t > 0$

$$\int_{\Omega(t,\infty)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \int_{\Gamma(t,\infty)} \beta u^2\,dS = -\int_{S_t} u \sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,d\widehat{x}.$$

Доказательство. Полагая в (1.3) $v = u\Phi_{t,h;T,1}$, получим

$$\int_{\Omega(t,T+1)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,\Phi_{t,h;T,1}\,dx + \int_{\Gamma(t,T+1)} \beta u^2 \Phi_{t,h;T,1}\,dS$$
$$= -h^{-1} \int_{\Omega(t,t+h)} u \sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \int_{\Omega_T} u \sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx. \tag{4.6}$$

В силу леммы 4 и оценки [2]

$$\int_{\Omega_T} u^2\,dx \leqslant c_0 + c_1 T \int_{\Omega(0,T+1)} |\nabla u|^2\,dx$$

интеграл по Ω_T в правой части (4.6) стремится к нулю для некоторой последовательности $T = T_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Устремляя k к ∞, затем h к 0, получаем утверждение леммы.

При оценке скорости сходимости решения к постоянной ограничимся случаем, когда поведение коэффициента $\beta(x)$ описывается степенной функцией от x_1.

Теорема 3. *Пусть* $\beta(x) \geqslant \beta_0 x_1^{-\alpha}$ *при* $x_1 \geqslant 1$, *и пусть* $\alpha = \mathrm{const}$, $0 \leqslant \alpha < 2$, $\beta_0 = \mathrm{const} > 0$. *Тогда существует постоянная* $A > 0$, *зависящая только от* $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2, β_0 *и* α, *такая что для любого решения* (1.1), (1.2), *удовлетворяющего условию*

$$u(x) = o(\exp\{A x_1^{1-\alpha/2}\}), \qquad x_1 \to \infty,$$

при всех $x_1 \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$|u(x)| \leqslant C_0 x_1^{\alpha/2} \exp\{-A x_1^{1-\alpha/2}\}, \qquad C_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Аналогично равенству (4.6) получим

$$\int_{\Omega(0,t+h_2)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,\Phi_{0,h_1;T,h_2}\,dx + \int_{\Gamma(0,t+h_2)} \beta u^2 \Phi_{0,h_1;T,h_2}\,dS$$
$$= -h_1^{-1} \int_{\Omega(0,h_1)} u \sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + h_2^{-1} \int_{\Omega(t,t+h_2)} u \sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx.$$

Устремляя h_1, а затем h_2 к нулю, получим, что для почти всех $t > 0$

$$\int_{\Omega(0,t)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx + \int_{\Gamma(0,t)} \beta u^2\, dS = I_0 + \int_{S_t} u \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, d\widehat{x}, \tag{4.7}$$

I_0 не зависит от t. Отсюда, используя стандартную оценку

$$\int_{S_t} u^2\, d\widehat{x} \leqslant c\biggl(\int_{S_t} |\nabla u|^2\, d\widehat{x} + \int_{\gamma_t} u^2\, ds\biggr), \qquad c = \mathrm{const},$$

получим

$$\begin{aligned} I(t) \equiv \int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\Gamma(0,t)} \beta u^2\, dS &\leqslant I_1 + c_1\biggl(\int_{S_t} u^2\, d\widehat{x}\biggr)^{1/2}\biggl(\int_{S_t} |\nabla u|^2)\, d\widehat{x}\biggr)^{1/2} \\ \leqslant I_1 + c_2 t^{\alpha/2}\biggl(\int_{S_t} |\nabla u|^2\, d\widehat{x} + \int_{\gamma_t} \beta u^2\, ds\biggr) &= I_1 + c_2 t^{\alpha/2} I'(t), \\ c_2 = c_2(\widehat{\Omega}, \lambda_1, \lambda_2, \beta_0) &> 0, \end{aligned}$$

I_1 не зависит от t. Запишем это неравенство в виде

$$\begin{gathered} (I'(t) - c_2^{-1} t^{-\alpha/2} I(t)) \exp\biggl\{-\biggl(c_2\biggl(1 - \frac{\alpha}{2}\biggr)\biggr)^{-1} t^{1-\alpha/2}\biggr\} \\ \geqslant -I_1 c_2^{-1} t^{-\alpha/2} \exp\biggl\{-\biggl(c_2\biggl(1 - \frac{\alpha}{2}\biggr)\biggr)^{-1} t^{1-\alpha/2}\biggr\}, \end{gathered}$$

или

$$(I(t) \exp\{-c_3^{-1} t^{\lambda}\})' \geqslant I_1 (\exp\{-c_3^{-1} t^{\lambda}\})',$$

где $\lambda = 1 - \alpha/2 > 0$, $c_3 = c_2\lambda$; $0 < t_0 < t$. Интегрируя, получаем, что

$$I(t_0) \leqslant I(t) \exp\{c_3^{-1}(-t^{\lambda} + t_0^{\lambda})\} + I_1(1 - \exp\{c_3^{-1}(-t^{\lambda} + t_0^{\lambda})\}).$$

Если условие теоремы выполнено с $A = c_3^{-1}/2$, то в силу (3.2) $I(t) = o(\exp\{c_3^{-1} t^{\lambda}\})$. Тогда из предыдущей оценки $I(t_0) \leqslant I_1$, и по лемме 5, оценивая интеграл по S_t как и выше, получаем, что

$$J(t) \equiv \int_{\Omega(t,\infty)} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\Gamma(t,\infty)} \beta u^2\, dS \leqslant -c_2 t^{\alpha/2} J'(t),$$

откуда

$$J(t) \leqslant J(t_0) \exp\{c_3^{-1}(-t^{\lambda} + t_0^{\lambda})\}, \qquad 0 < t_0 < t.$$

Так как $\int_{\Omega_t} u^2\, dx \leqslant c_4 t^{\alpha} J(t)$, $c_4 = \mathrm{const}$, то, учитывая лемму 3, получаем утверждение теоремы.

Для полноты рассмотрим также случай предельного показателя в степенной оценке граничного коэффициента $\alpha = 2$, для которого сохраняется дихотомия решений. Уже в случае уравнения Лапласа возможный минимальный рост решений, а также стремление ограниченных решений к нулю имеют не экспоненциальный, а степенной характер [7; теорема 5].

Теорема 4. *Пусть $\beta(x) \geqslant \beta_0 x_1^{-2}$ при $x_1 \geqslant 1$; $\beta_0 = \mathrm{const} > 0$, $u(x)$ – решение* (1.1), (1.2) *в* Ω, *для которого*

$$u(x) = o(x_1^{\mu}), \quad x_1 \to \infty, \qquad \mu = \mu(\widehat{\Omega}, \lambda_1, \lambda_2, \beta_0) > 0.$$

Тогда $u(x)$ ограничена в $\Omega(1,\infty)$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3, получаем оценку

$$I(t) \leqslant I_1 + c_1 t I'(t) \qquad \text{или} \qquad (I(t)t^{-c_1^{-1}})' \geqslant I_1(t^{-c_1^{-1}})'.$$

Интегрируя получаем, что

$$I(t_0) \leqslant I(t)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{c_1^{-1}} + I_1\left(1 - \left(\frac{t_0}{t}\right)^{c_1^{-1}}\right), 1 \leqslant t_0 < t.$$

Так как при $\mu = c_1^{-1}/2$ из (3.2) получаем, что $I(t) = o(t^{c_1^{-1}})$, то из предыдущей оценки следует, что $I(t) \leqslant I_1$. Тогда из леммы 3 имеем $|u(x)| \leqslant ct^{1/2}$ на S_t, $t \geqslant 1$. Применяя принцип максимума так же, как в доказательстве теоремы 1, получим, что $|u(x)| \leqslant \sup_{S_1} |u|$ в $\Omega(1,\infty)$.

Лемма 6. *Пусть $\beta(x) \geqslant \beta_0 x_1^{-2}$ при $x_1 \geqslant 1$, $\beta_0 = \mathrm{const} > 0$, $u(x)$ – ограниченное решение* (1.1), (1.2) *в* Ω. *Тогда*

$$\int_{\Omega(t,\infty)} |\nabla u|^2 \, dx \leqslant c_0 t^{-\nu}, \qquad \nu = \nu(\widehat{\Omega}, \lambda_1, \lambda_2, \beta_0) > 0, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Рассуждая как и при доказательстве теоремы 3, получаем

$$J(t) \equiv \int_{\Omega(t,\infty)} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Gamma(t,\infty)} \beta u^2 \, dS \leqslant -c_1 t J'(t), \qquad c_1 = c_1(\widehat{\Omega}, \lambda_1, \lambda_2, \beta_0).$$

Интегрируя, получаем, что $J(t) \leqslant J(t_0)(t_0/t)^{c_1^{-1}}$, $1 \leqslant t_0 < t$, и лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть V – решение уравнения* (1.1) *в* Ω, *удовлетворяющее условиям*

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0, \qquad P(t,V) \equiv 1, \qquad C_1 x_1 \leqslant V(x) \leqslant C_2 x_1, \quad x_1 \geqslant 1,$$
$$\int_{\Omega_t} |\nabla V|^2 \, dx \leqslant c_1, \qquad C_1, C_2, c_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $k \geqslant k_0$ и $a \geqslant 0$ справедливо неравенство $\inf_{S_{a+k}} V > \sup_{S_a} V$.

Доказательство. Заметим, что из условия $P(t,V) = 1$ следует, что

$$\int_{\Omega_t} |\nabla V|^2 \, dx \geqslant c_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Положим в интегральном тождестве (4.3) для функции V пробную функцию $v = V\Phi_{a,1;a+k,1}$:

$$\int_{\Omega(a,a+k+1)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j} \Phi_{a,1;a+k,1} \, dx = \left(\int_{\Omega_{a+k}} - \int_{\Omega_a}\right) \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial V}{\partial x_i} V \, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{V}(a+k) - \overline{V}(a) + \int_{\Omega_{a+k}} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial V}{\partial x_i}(V - \overline{V}(a+k))\,dx \\
&\qquad - \int_{\Omega_a} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial V}{\partial x_i}(V - \overline{V}(a))\,dx.
\end{aligned}
$$

Оценивая интегралы по Ω_{a+k} и Ω_a с использованием неравенств Коши–Буняковского и Пуанкаре, получим, что

$$
\overline{V}(a+k) - \overline{V}(a) \geqslant c_3 \int_{\Omega(a+1,a+k)} |\nabla V|^2\,dx - c_4 \int_{\Omega_a \cup \Omega_{a+k}} |\nabla V|^2\,dx \geqslant c_5 k - c_6,
$$

$c_i > 0$ не зависят от k, a. Так как из оценки максимума модуля решения [2; с. 600] и неравенства Пуанкаре имеем

$$
\sup_{\Omega_t}(V - \overline{V}(t))^2 \leqslant c_7 \int_{\Omega(t-1,t+2)} (V - \overline{V}(t))^2\,dx \leqslant c_8 \int_{\Omega(t-1,t+2)} |\nabla V|^2\,dx \leqslant c_9,
$$

из предыдущего неравенства следует утверждение леммы при $k \geqslant k_0 = \mathrm{const}$.

Лемма 8. *Пусть* $\beta(x) \geqslant \beta_0 x_1^{-2}$ *при* $x_1 \geqslant 1$, $\beta_0 = \mathrm{const} > 0$, *и пусть* $u(x)$ – *положительное ограниченное решение* (1.1), (1.2) *в* Ω, $\overline{u}(a) = c_0 a^{-\delta}$ *для некоторого* $a \geqslant a_0 = \mathrm{const} > 0$, $c_0 = \mathrm{const} \geqslant 1$; $\overline{u}(t) \geqslant c_0 t^{-\delta}$ *для всех* $t \in (a,b)$. *Тогда* $u(x) \leqslant c_1 x_1^{-\delta}$ *в* $\Omega(a,b)$, $c_1 = \mathrm{const} > 0$. *Здесь* $\delta = \delta(\widehat{\Omega}, \lambda_1, \lambda_2, \beta_0) > 0$.

Доказательство. Аналогично (4.4), из неравенства Пуанкаре и леммы 6, получим

$$
\begin{aligned}
\overline{u}(b) - \overline{u}(a) &\leqslant - \int_{\Omega(a,b+1)} \beta u V \Phi_{a,1;b,1}\,dS \\
&\qquad + \overline{V}(b) \int_b^{b+1} P(t,u)\,dt - \overline{V}(a) \int_a^{a+1} P(t,u)\,dt + O(a^{-\nu/2}) \\
&= - \int_{\Omega(a,b+1)} \beta u V \Phi_{a,1;b,1}\,dS + \overline{V}(a) \biggl(\int_b^{b+1} - \int_a^{a+1} \biggr) P(t,u)\,dt \\
&\qquad + (\overline{V}(b) - \overline{V}(a)) \int_b^{b+1} P(t,u)\,dt + O(a^{-\nu/2}),
\end{aligned}
$$

где $V(x)$ – та же функция, что и в теореме 2 и лемме 7. Так как u – положительное ограниченное решение, из равенства (4.2) как и в доказательстве теоремы 2 следует, что $P(t,u) < 0$ и $P(t,u)$ возрастает по t при всех $t \geqslant 0$. Предположим, что $b \geqslant a + k_0 + 1$, где k_0 – постоянная из леммы 7. Тогда, учитывая, что согласно (4.1)

$$
\int_b^{b+1} P(t,u)\,dt - \int_a^{a+1} P(t,u)\,dt = \int_{\Gamma(a,b+1)} \beta u \Phi_{a,1;b,1}\,dS,
$$

получаем из предыдущей оценки

$$
\overline{u}(b) - \overline{u}(a) \leqslant \int_{\Omega(a,b+1)} \beta u (\overline{V}(a) - V) \Phi_{a,1;b,1}\,dS + O(a^{-\nu/2}). \tag{4.8}
$$

Используя оценку для $\sup|V-\overline{V}(a)|$ через $\|V-\overline{V}(a)\|_{L_2}$ [2], неравенство Пуанкаре, оценку для интеграла Дирихле функции V, соотношение (4.2) и лемму 6, получим

$$\int_{\Gamma(a,a+k_0+1)} \beta u(\overline{V}(a)-V)\Phi_{a,1;b,1}\,dS \leqslant c_2\int_{\Gamma(a,a+k_0+1)} \beta u\,dS$$
$$= c_2(P(a+k_0+1,u)-P(a,u)) < c_2|P(a,u)| < c_2\int_{a-1}^{a}|P(t,u)|\,dt = O(a^{-\nu/2}), \tag{4.9}$$

$c_i>0$, $i=2,3,\dots$, зависят только от $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2. Предположим, что $b\geqslant\varkappa\sigma a$, где $\varkappa>1$ и $\sigma>1$ будут выбраны позже. Пусть $a+k_0+1<\varkappa a$. Тогда в силу леммы 7

$$\int_{\Gamma(a+k_0+1,\varkappa a)} \beta u(\overline{V}(a)-V)\,dS < 0. \tag{4.10}$$

Используя лемму 6 и неравенство

$$\overline{u}(k)\leqslant c_3\biggl(\biggl(\int_{\Omega_k}|\nabla u|^2\,dx\biggr)^{1/2}+\int_{\Gamma_k}u\,dS\biggr),$$

получим

$$\int_{\Gamma_k}\beta u\,dS \geqslant \beta_0(k+1)^{-2}\int_{\Gamma_k}u\,dS \geqslant c_4\beta_0k^{-2}\biggl(\overline{u}(k)-\biggl(\int_{\Omega_k}|\nabla u|^2\,dx\biggr)^{1/2}\biggr)$$
$$\geqslant c_4\beta_0k^{-2}(c_0k^{-\delta}-ck^{-\nu/2}) \geqslant c_5c_0\beta_0k^{-2-\delta}, \qquad k\geqslant k_1=\mathrm{const},$$

если $0<\delta<\nu/2$; c не зависит от k. Тогда при $k>\varkappa a$, $\varkappa=4C_1^{-1}C_2$ получим

$$\int_{\Gamma_k}\beta u(\overline{V}(a)-V)\,dS \leqslant c_5c_0\beta_0k^{-2-\delta}(2C_2a-C_1k)$$
$$\leqslant c_5c_0\beta_0k^{-1-\delta}(2C_2\varkappa^{-1}-C_1) = -\frac{c_5c_0C_1\beta_0k^{-1-\delta}}{2},$$
$$\int_{\Gamma(\varkappa a,\varkappa\sigma a)}\beta u(\overline{V}(a)-V)\,dS \leqslant -c_6c_0C_1\beta_0\int_{\varkappa a}^{\varkappa\sigma a}t^{-1-\delta}\,dt$$
$$= -c_6c_0C_1\beta_0\delta^{-1}(\varkappa a)^{-\delta}(1-\sigma^{-\delta}).$$

Используя также (4.8)–(4.10) тогда получаем, что при $\sigma^{-\delta}=1/2$

$$\overline{u}(b)\leqslant\overline{u}(a)-c_6c_0C_1\beta_0\delta^{-1}\frac{(\varkappa a)^{-\delta}}{2}+O(a^{-\nu/2})$$
$$= a^{-\delta}c_0\biggl(1-\frac{c_6C_1\beta_0\delta^{-1}\varkappa^{-\delta}}{2}\biggr)+O(a^{-\nu/2}).$$

Если $c_6C_1\beta_0\delta^{-1}\varkappa^{-\delta}\geqslant 4$ и $0<\delta<\nu/2$, то получим, что

$$\overline{u}(b)\leqslant -c_0a^{-\delta}+O(a^{-\nu/2})\leqslant -\frac{c_0a^{-\delta}}{2}<0, \qquad a\geqslant a_0=\mathrm{const}>0.$$

Получено противоречие и, таким образом, $b < \varkappa\sigma a$. Как и в доказательстве теоремы 1 из принципа максимума получаем, что $u(x) \leqslant \sup_{S_a} u$ при $x_1 > a$; тогда, по лемме 3 и неравенству Пуанкаре при $a < x_1 < b < \varkappa\sigma a$ получаем требуемую оценку

$$u(x) \leqslant \sup_{S_a} u \leqslant c_7\biggl(\biggl(\int_{\Omega(a-1,a+1)} |\nabla u|^2\,dx\biggr)^{1/2} + \overline{u}(a)\biggr) \leqslant c_8 c a^{-\delta} < c_8(\varkappa\sigma)^\delta x_1^{-\delta}.$$

Теорема 5. *Пусть* $\beta(x) \geqslant \beta_0 x_1^{-2}$ *при* $x_1 \geqslant 1$, $\beta_0 = \mathrm{const} > 0$; $\beta(x) \to 0$ *при* $x_1 \to \infty$ *равномерно по* $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$; $u(x)$ *– ограниченное решение* (1.1), (1.2) *в* Ω. *Тогда при* $x_1 \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$|u(x)| \leqslant c_0 x_1^{-\delta}, \quad \delta = \delta(\widehat{\Omega}, \lambda_1, \lambda_2, \beta_0), \qquad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Так как из теоремы 2 следует, что в данном случае ограниченное решение стремится к нулю, из принципа максимума легко получаем, что достаточно доказать теорему для положительных ограниченных решений. Действительно, если u – положительное решение (1.1), (1.2), то для любого ограниченного решения u_1 имеем $|u_1| \leqslant c_1 u + \varepsilon$ на S_0 и на S_t для достаточно больших t и, следовательно, в $\Omega(0,t)$. Устремляя ε к нулю, получим, что $|u_1| \leqslant c_1 u$ в Ω. Существование положительного ограниченного решения (1.1), (1.2) можно получить, рассмотрев функции u_N в ограниченной области $\Omega(0,N)$, удовлетворяющие (1.1), (1.2) и условиям $u_N|_{S_0} = 1$, $u_N|_{S_N} = 0$. Такие решения u_N положительны в $\Omega(0,N)$, равномерно ограничены и в силу (3.2) равномерно по N ограничены в норме $W_2^1(\Omega(0,t))$ для любого $t > 0$. Отсюда, выделяя слабо сходящуюся в $W_2^1(\Omega(0,t))$ для любого $t > 0$ последовательность u_{N_k}, получаем существование положительного решения в Ω.

Рассмотрим положительное ограниченное решение $u(x)$. С учетом оценки $\sup|u|$ через $|\overline{u}|$ и $\|\nabla u\|_{L_2}$ и леммы 6 достаточно доказать, что $\overline{u}(t) \leqslant ct^{-\delta}$. Пусть a_0 – постоянная из леммы 8, $c_0 = \max\{\overline{u}(a_0)a_0^{-\delta}, 1\}$. Если для всех $t > a_0$ верна оценка $\overline{u}(t) \leqslant c_0 t^{-\delta}$, то теорема доказана. Пусть $\overline{u}(a) = c_0 a^{-\delta}$ и $\overline{u}(t) > c_0 t^{-\delta}$ при $a_0 \leqslant a < t < b$. Тогда по лемме 8 $\overline{u}(t) \leqslant c_1 t^{-\delta}$ при $a < t < b$. Теорема доказана.

5. Случай, близкий к задаче Неймана: стремление ограниченных решений к постоянной, трихотомия решений.

Теорема 6. *Пусть* $0 \leqslant \beta(x) \leqslant \beta_1 x_1^{-\alpha}$ *на* Γ, $\alpha = \mathrm{const} > 2$, $\beta_1 = \mathrm{const} > 0$. *Тогда для любого ограниченного в* Ω *решения* u (1.1), (1.2) *существует* $C = \mathrm{const}$ *такое, что для всех* $t \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\sup_{S_t} |u - C| \leqslant c_0 t^{-\alpha/2+1}, \qquad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Из леммы 5, используя неравенство Пуанкаре, получаем для почти всех $t > 0$

$$J(t) \equiv \int_{\Omega(t,\infty)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant -c_1 \int_{S_t} u \sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,d\widehat{x}$$
$$= -c_1 \int_{S_t} (u - \widehat{u}(t)) \sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,d\widehat{x} - c_1\widehat{u}(t)P(t,u) \leqslant -c_2 J'(t) - c_1\widehat{u}(t)P(t,u),$$

$c_i > 0$ не зависят от $t \geqslant 1$. Так как u ограничено в Ω, то из равенства (4.2) и конечности интеграла Дирихле для $u(x)$ следует, что

$$P(t,u) \to 0, \quad t \to \infty, \qquad P(t,u) = -\int_{\Omega(t,\infty)} \beta u\, dS, \qquad |P(t,u)| \leqslant c_3 t^{-\alpha+1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &J(t) \leqslant -c_2 J'(t) + c_4 t^{-\alpha+1}, \qquad (J(t)\exp\{c_2^{-1}t\})' \leqslant c_5 t^{-\alpha+1}\exp\{c_2^{-1}t\}, \\ &J(t) \leqslant J(t_0)\exp\{-c_2^{-1}(t-t_0)\} + c_5\exp\{-c_2^{-1}t\}\int_{t_0}^{t} \tau^{-\alpha+1}\exp\{c_2^{-1}\tau\}\,d\tau \\ &\qquad \leqslant c_6 t^{-\alpha+1}, \qquad 1 \leqslant t_0 \leqslant t. \end{aligned}$$

Отсюда следует [4; с. 204], что для некоторой постоянной C и всех $t \geqslant 1$

$$\int_{\Omega_t} (u-C)^2\, dx \leqslant c_7 t^{-\alpha+2}.$$

Из леммы 2 с учетом того, что $(\partial(u-C)/\partial\nu)|_\Gamma = -\beta u$, получаем требуемую оценку

$$\sup_{S_t}(u-C)^2 \leqslant c_8\biggl(\int_{\Omega_{t-1/2}} (u-C)^2\, dx + \sup_{\Gamma_{t-1/2}} (\beta u)^2\biggr) \leqslant c_9 t^{-\alpha+2}.$$

При изучении вопроса о возможном поведении произвольных решений (1.1), (1.2) в случае быстрого убывания коэффициента $\beta(x)$ ключевым моментом является существование решения, ведущего себя при $x_1 \to \infty$ как линейная функция, что характерно и в случае граничных условий Неймана.

Теорема 7. *Пусть $\beta(x) \geqslant 0$ на Γ, и пусть $\int_\Gamma x_1\beta\, dS < \infty$, $\beta(x) \leqslant c$ при $x_1 \geqslant x_1^{(0)} = \mathrm{const}$, c – некоторая постоянная, зависящая от $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2. Тогда в Ω существует положительное решение* (1.1), (1.2) *$U(x)$, удовлетворяющее условиям*

$$A_1 x_1 \leqslant U(x) \leqslant A_2 x_1, \quad x_1 \geqslant 1, \quad A_1, A_2 = \mathrm{const} > 0, \qquad P(t,U) \to 1, \quad t \to \infty,$$
$$\int_{\Omega(0,t)} |\nabla U|^2\, dx \leqslant c_0 t, \qquad t \geqslant 1, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Пусть $V(x) > 0$ – решение уравнения (1.1) в Ω, удовлетворяющее граничному условию Неймана $(\partial V/\partial\nu)|_\Gamma = 0$, оценкам

$$C_1 x_1 \leqslant V(x) \leqslant C_2 x_1, \quad x_1 \geqslant 1, \quad C_1 C_2 = \mathrm{const} > 0, \qquad \int_{\Omega_t} |\nabla V|^2\, dx \leqslant C = \mathrm{const} > 0$$

и условию $P(t,V) = 1$ при $t \geqslant 0$. Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ в области $\Omega(0,N)$ рассмотрим решение $U_N(x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.2) на $\Gamma(0,N)$ и условиям $U_N|_{S_0} = 0$, $U_N|_{S_N} = C_1 N$. Из принципа максимума следует, что $U_N > 0$ в $\Omega(0,N)$. Полагая в интегральном тождестве вида (1.3) для $u = U_N$ пробную функцию $v = U_N\Phi$, где $\Phi = \Phi(x_1)$ непрерывная функция, $\Phi = 1$ при $0 \leqslant x_1 \leqslant N-h$, $\Phi(N) = 0$, Φ – линейная при $N-h \leqslant x_1 \leqslant N$, получим

$$\int_{\Omega(0,N)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\frac{\partial U_N}{\partial x_j}\Phi\, dx + \int_{\Gamma(0,N)} \beta U_N^2 \Phi\, dS = h^{-1}\int_{\Omega(N-h,N)} U_N \sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\, dx.$$

Так как $(U_N - C_1N)|_{S_N} = 0$, то из неравенства вида Фридрихса

$$\int_{\Omega(N-h,N)} (U_N - C_1N)^2\,dx \leqslant c_1h^2 \int_{\Omega(N-h,N)} |\nabla U_N|^2\,dx, \qquad c_1 = \mathrm{const},$$

получаем

$$h^{-1}\int_{\Omega(N-h,N)} U_N \sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\,dx = h^{-1}C_1N\int_{\Omega(N-h,N)} \sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\,d\widehat{x} + o(1), \quad h\to 0.$$

Тогда из предыдущего равенства получаем, что

$$\int_{\Omega(0,N)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\frac{\partial U_N}{\partial x_j}\,dx + \int_{\Gamma(0,N)} \beta U_N^2\,dS = C_1NP(N,U_N).$$

Отсюда, учитывая, что при $U_N|_{S_0} = 0$ имеем

$$m_0C_1^2N^2 = \int_{S_N} U_N^2\,d\widehat{x} \leqslant c_2N\int_{\Omega(0,N)} |\nabla U_N|^2\,dx,$$

здесь и далее в доказательстве $c_i > 0$ не зависят от N, получаем

$$P(N,U_N) \geqslant c_3N^{-1}\int_{\Omega(0,N)} |\nabla U_N|^2\,dx \geqslant c_4 > 0. \tag{5.1}$$

Для функции $w = U_N - V$ имеем $Lw = 0$ в $\Omega(0,N)$,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\Gamma(0,N)} = -\beta U_N \leqslant 0, \qquad w|_{S_0\cup S_N} \leqslant 0.$$

Отсюда $w < 0$ в $\Omega(0,N)$. Таким образом, в $\Omega(0,N)$ имеем

$$0 < U_N < V \leqslant C_2x_1. \tag{5.2}$$

Так как согласно (4.2) при $t < N$

$$P(t,U_N) = P(N,U_N) - \int_{\Gamma(t,N)} \beta U_N\,dS,$$

из (5.1) и (5.2) получаем, что существует $t_0 > 0$, такое, что при $t \geqslant t_0$ и $N \geqslant t$

$$P(t,U_N) \geqslant \frac{c_4}{2} > 0. \tag{5.3}$$

Из оценки (5.2) и оценки вида (3.2) L_2-нормы градиента решения через норму самого решения следует, что последовательность U_N $(N \geqslant t)$ ограничена в $W_2^1(\Omega(0,t))$ для любого $t > 0$. Отсюда стандартным образом получаем последовательность U_{N_k}, слабо сходящуюся в $W_2^1(\Omega(0,t))$ для любого $t > 0$ к некоторой функции U. Очевидно, что U удовлетворяет (1.1), (1.2),

$$0 < U(x) < V(x) \leqslant C_2x_1 \qquad \text{при} \quad x_1 \geqslant 1.$$

Из (4.2) получаем, что $P(t,U) \to p = \mathrm{const}$, $t \to \infty$. Так как из (4.1) следует, что

$$P(t,U_N) = \int_0^1 P(\tau,U_N)\,d\tau + \int_{\Gamma(0,t)} \beta U_N \Psi(x_1)\,dS, \qquad \Psi = \begin{cases} x_1, & 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x_1 \leqslant t, \end{cases}$$

то

$$P(t,U) = \lim_{k\to\infty} P(t,U_{N_k}).$$

Учитывая (5.3), получаем, что $P(t,U) \geqslant c_4/2$ при $t \geqslant t_0$ и $p \geqslant c_4/2 > 0$. Нормируем функцию U условием $p = 1$.

Оценим интеграл Дирихле для U. Используя для почти всех $t > 0$ равенство вида (4.7) с учетом того, что $U|_{S_0} = 0$, получаем

$$I(t) \equiv \int_{\Omega(0,t)} |\nabla U|^2\,dx \leqslant c_5 \int_{S_t} U \sum_{i=1}^n a_{i1} \frac{\partial U}{\partial x_i}\,d\widehat{x} \leqslant c_6 t \sqrt{I'(t)}\,, \qquad I' I^{-2} \geqslant c_6^{-2} t^{-2}.$$

Интегрируя от t до ∞, получим $I(t) \leqslant c_6^2 t$.

Пусть $N_0 \in \mathbb{N}$ – такое, что

$$\int_{\Gamma(N_0,\infty)} \beta U\,dS < \frac{C_1}{4C_2}\,, \qquad P(t,U) \geqslant \frac{1}{2}\,, \quad t \geqslant N_0.$$

Из равенства вида (4.4) для $u = U$, используя неравенство Пуанкаре и оценку интеграла Дирихле для U и V, получаем для достаточно больших $N \geqslant N_0$

$$\begin{aligned} \overline{U}(N) &\geqslant \overline{V}(N) \int_N^{N+1} P(t,U)\,dt - \int_{\Gamma(N_0,N+1)} \beta U V\,dS - c_7 N^{1/2} \\ &\geqslant \frac{C_1 N}{2} - \frac{C_2(N+1)C_1}{(4C_2)} - c_7 N^{1/2} \geqslant c_8 N. \end{aligned}$$

Оценивая отклонение U от $\overline{U}(N)$ в области Ω_N по лемме 2, используя неравенство Пуанкаре и оценки функции U и ее интеграла Дирихле, получим, что

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_N}(U - \overline{U}(N))^2 &\leqslant c_9 \biggl(\int_{\Omega(N-1,N+2)} (U - \overline{U}(N))^2\,dx + \sup_{\Omega(N-1,N+2)} (\beta U)^2 \biggr) \\ &\leqslant c_{10}\Bigl(N + N^2 \sup_{\Omega(N-1,N+2)} \beta^2\Bigr) \leqslant \frac{c_8^2 N^2}{4}\,, \qquad N \geqslant N_0' = \mathrm{const}, \end{aligned}$$

если $c_{10} c^2 \leqslant c_8^2/5$. Учитывая линейную оценку снизу для $\overline{U}(N)$, получаем требуемую оценку снизу для $U(x)$. Теорема, таким образом, доказана.

Лемма 9. *Пусть* $\beta(x) \geqslant 0$ *на* Γ, $\beta(x) \leqslant c'$ *при* $x_1 \geqslant x_1^{(0)} = \mathrm{const}$, c' *– некоторая постоянная, зависящая от* $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2; $u(x)$ *– решение* (1.1), (1.2), *причем для некоторой последовательности* $t_k \to \infty$ *выполнено условие*

$$\sup_{\Omega_{t_k}} |u| = o(\exp(A t_k)), \qquad k \to \infty,$$

где $A > 0$ – *некоторая постоянная, зависящая от* $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2. *Тогда существует последовательность* $t'_k \to \infty$, $k \to \infty$, *такая, что справедлива оценка*

$$\overline{u}(t'_k) - \frac{1}{2}|\overline{u}(t'_k)| - I_1 \leqslant u(x) \leqslant \overline{u}(t'_k) + \frac{1}{2}|\overline{u}(t'_k)| + I_1, \qquad x \in S_{t'_k+1/2},$$

$I_1 \geqslant 0$ *не зависит от* k.

Доказательство. Используя оценку (3.2) получим, что

$$\int_{\Omega(0,t_k)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant I_0 + c_1 \int_{\Omega_{t_k}} u^2\,dx = o(\exp(2At_k)), \qquad k \to \infty, \tag{5.4}$$

$c_i = c_i(\widehat{\Omega}, \lambda_1, \lambda_2) > 0$, $I_0 \geqslant 0$ не зависит от $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что для некоторой последовательности $t'_k \to \infty$

$$\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \delta \int_{\Omega(0,t'_k)} |\nabla u|^2\,dx, \qquad \delta = \exp\{2A\} - 1 > 0. \tag{5.5}$$

Действительно, в противном случае для произвольного $t \geqslant t_0 = \mathrm{const}$

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2\,dx = \int_{\Omega(0,t+1)} |\nabla u|^2\,dx - \int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx > \delta \int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx,$$

откуда получаем, учитывая (5.4), что

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx < (1+\delta)^{-1} \int_{\Omega(0,t+1)} |\nabla u|^2\,dx < \dots < (1+\delta)^{-N_k} \int_{\Omega(0,t+N_k)} |\nabla u|^2\,dx \\ = (1+\delta)^{-N_k} o(\exp\{2A(t+N_k)\}) \to 0, \qquad k \to \infty,\end{aligned}$$

если брать $N_k \in \mathbb{N}$ такие, что $t_k - 1 \leqslant t + N_k \leqslant t_k$. Таким образом $\nabla u \equiv 0$. Итак, справедлива оценка (5.5). Из (5.5), (5.4) и неравенства Пуанкаре получаем

$$\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \delta\biggl(I_0 + c_1 \int_{\Omega_{t'_k}} u^2\,dx\biggr) \leqslant c_2\delta\biggl(\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx + \overline{u}^2(t'_k) + I_0\biggr).$$

Если $\delta \leqslant c_2^{-1}/2$, то

$$\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant 2c_2\delta(\overline{u}^2(t'_k) + I_0). \tag{5.6}$$

Из лемм 2 и 3, неравенства Пуанкаре и оценки (5.6) получим для $k \geqslant k_0 = \mathrm{const}$

$$\begin{aligned}\sup_{S_{t'_k+1/2}} (u - \overline{u}(t'_k))^2 &\leqslant c_3\biggl(\int_{\Omega_{t'_k}} (u - \overline{u}(t'_k))^2\,dx + \sup_{\Gamma_{t'_k}}(\beta u)^2\biggr) \\ &\leqslant c_4\biggl(\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx + \sup_{\Gamma_{t'_k}} \beta^2 \int_{\Omega_{t'_k}} u^2\,dx\biggr) \\ &\leqslant c_5\biggl(\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx + \sup_{\Gamma_{t'_k}} \beta^2\biggl(\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx + \overline{u}^2(t'_k)\biggr)\biggr)\end{aligned}$$

$$\leqslant c_5(1+(c')^2)\int_{\Omega_{t'_k}}|\nabla u|^2\,dx + c_5(c')^2\overline{u}^2(t'_k))$$

$$\leqslant c_6\delta(1+(c')^2)(\overline{u}^2(t'_k)+I_0) + c_5(c')^2\overline{u}^2(t'_k) \leqslant \frac{1}{4}(\overline{u}^2(t'_k)+I_0),$$

если

$$c_5(c')^2 \leqslant \frac{1}{8}, \qquad c_6\delta(1+(c')^2) \leqslant \frac{1}{8}.$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для последовательности t'_k, $k \geqslant k_0$,

$$c' = (8c_5)^{-1/2}, \qquad \delta = \min\left\{\frac{c_2^{-1}}{2}, (8c_6(1+(c')^2))^{-1}\right\}, \qquad A = 2^{-1}\ln(1+\delta).$$

Лемма 10. *Пусть для $u(x)$ выполнены условия леммы 9, и пусть*

$$\int_\Gamma x_1\beta\,dS < \infty, \qquad \beta(x) \leqslant c \quad \text{при} \quad x_1 \geqslant x_1^{(0)} = \text{const},$$

где $c > 0$ – постоянная из теоремы 7. Тогда справедлива оценка

$$|u(x)| \leqslant Cx_1, \qquad C = \text{const} > 0, \quad x_1 \geqslant 1.$$

Доказательство. Предположим противное; тогда для некоторой последовательности $\widetilde{t}_k \to \infty$ имеем

$$\sup_{S_{\widetilde{t}_k}} \frac{|u|}{\widetilde{t}_k} \to \infty, \qquad k \to \infty.$$

Пусть U – линейно растущее решение (1.1), (1.2) в Ω, существование которого доказано в теореме 7. Применяя к функциям $u \pm c_0U$ при достаточно большом $c_0 > 0$ принцип максимума, легко получим, что

$$\sup_{S_t} \frac{|u|}{t} \to \infty, \qquad t \to \infty.$$

Пусть t'_k – последовательность, для которой справедливо утверждение леммы 9. Без ограничения общности можно считать, что $\sup_{S_{t'_k+1/2}} u > 0$. Тогда в силу леммы 9 получаем, что

$$\inf_{S_{t'_k+1/2}} \frac{u}{t'_k} \to +\infty, \qquad k \to \infty.$$

Применяя принцип максимума к функции $U - c_1 - \varepsilon u$ для достаточно большого $c_1 > 0$, и устремляя ε к 0, получим, что $U \leqslant c_1$ в $\Omega(t'_1+1/2,\infty)$, что противоречит линейному росту U. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть выполнены условия леммы 10, и, кроме того, выполнено условие $P(t,u) \to 0$, $t \to \infty$. Тогда решение $u(x)$ ограничено в Ω.*

Доказательство. Согласно лемме 10 $|u(x)| \leqslant Cx_1$, $x_1 \geqslant 1$. Тогда

$$\int_{\Gamma(0,t)} x_1\beta u\,dS = o(t), \qquad t \to \infty.$$

Из равенства (4.4) и неравенства Пуанкаре тогда получаем, что

$$|\overline{u}(t)| \leqslant o(t) + c_1\left(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}, \qquad t \to \infty,$$

$c_i > 0$ не зависят от t. Оценивая интеграл Дирихле для u так же, как это делалось при доказательстве теоремы 7 для функции U, получим, что

$$\int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant c_2 t.$$

Тогда $\overline{u}(t) = o(t)$. Используя утверждение леммы 9, получим, что $\sup_{S_{t_k}} |u| = o(t_k)$ для некоторой последовательности $t_k \to \infty$, т.е. $u(x) \leqslant c_0 + \varepsilon U$ на $S_{t_1} \cup S_{t_k}$ при $k > k_0(\varepsilon)$. Применяя принцип максимума и устремляя ε к 0, получим, что $u(x) \leqslant c_0$ для достаточно больших x_1. Аналогично получим оценку снизу. Лемма доказана.

Основной результат, относящийся к случаю быстрого убывания коэффициента в граничном условии, состоит в следующем.

Теорема 8. *Пусть $\beta(x) \geqslant 0$ на Γ, $\int_\Gamma x_1\beta\,dS < \infty$, $\beta(x) \leqslant \min\{c, c'\}$ при $x_1 \geqslant x_1^{(0)} = \mathrm{const}$, c, c' – постоянные из теоремы 7 и леммы 9 соответственно. Тогда любое решение* (1.1), (1.2) *ведет себя одним из трех возможных способов*:

1) $\int_{\Omega_t} (u - C)^2\,dx \to 0$, $t \to \infty$, *для некоторого* $C = \mathrm{const}$;
2) $\sup_{\Omega_t} |u| \geqslant C_0 \exp(At)$, *где постоянная* $A > 0$ *зависит от* $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2, $C_0 = \mathrm{const} > 0$;
3) $C_1 x_1 \leqslant u(x) \leqslant C_2 x_1$ *при* $x_1 \geqslant x_1^{(1)} = \mathrm{const} > 0$, $C_1, C_2 = \mathrm{const}$, $C_1 C_2 > 0$.

Доказательство. Согласно лемме 10 существует такое $A > 0$, что любое решение (1.1), (1.2), не удовлетворяющее условию 2), удовлетворяет в Ω неравенству

$$|u(x)| \leqslant c_0 x_1 \qquad \text{при} x_1 \geqslant 1, \quad c_0 = \mathrm{const}.$$

Для такого решения из равенства (4.2) следует, что существует конечный предел $\lim_{t\to\infty} P(t,u) = p$. Тогда для решения (1.1), (1.2)

$$w \equiv u - pU,$$

где U – линейно растущее решение (1.1), (1.2) из теоремы 7, получим

$$\lim_{t\to\infty} P(t,w) = 0.$$

Согласно лемме 11 функция w ограничена в Ω. Таким образом, с учетом теоремы 1, получаем, что $u = w + pU$ удовлетворяет либо условию 1) при $p = 0$, либо условию 3) при $p \neq 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Е. М. Ландис, Г. П. Панасенко, “Об одном варианте теоремы типа Фрагмена–Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **5** (1979), 105–136.

[2] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей”, *Матем. сб.*, **112 (154)**:4 (8) (1980), 588–610.

[3] O. A. Oleinik, G. A. Yosifian, “On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **78**:1 (1982), 29–53.

[4] А. В. Неклюдов, “О задаче Неймана для дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области, близкой к цилиндру”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **16** (1992), 191–217.

[5] К. П. Самайтис, “Оценки решений задач Неймана и Робена для уравнения Лапласа в цилиндре”, *Дифференц. уравнения*, **38**:7 (2002), 995–996.

[6] К. П. Самайтис, “Некоторые оценки решений для уравнения Лапласа в цилиндрообразных областях”, *Дифференц. уравнения*, **38**:8 (2002), 1105–1112.

[7] А. В. Неклюдов, “О решениях третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в полубесконечном цилиндре”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2013, № 2, 48–58.

[8] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

[9] С. С. Лахтуров, “Об асимптотике решений второй краевой задачи в неограниченных областях”, *УМН*, **35**:4 (214) (1980), 195–196.

[10] А. В. Неклюдов, “Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида $Lu = e^u$ в бесконечном цилиндре”, *Матем. заметки*, **85**:3 (2009), 408–420.

А. В. Неклюдов
Московский государственный технический
университет имени Н. Э. Баумана
E-mail: nekl5@yandex.ru

Поступило
08.12.2015